Απειροστικός 2 (Σαρόγλου) 28/02/2019

Απόλυτη σύγκλιση: $\sum_{n=1}^{n} \alpha_k$ συγκλίνει απόλυτα, αν η $\sum_{n=1}^{n} |\alpha_k|$ συγκλίνει (κανονικά)

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $\sum_{n=1}^{n} \alpha_k$ συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει

Απόδειξη: Θεωρώ την σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k| - \alpha_k)$ $\left(\underline{\underline{|\alpha_k| - \alpha_k \geq 0}} \right)$

Έστω $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ (η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$)

και έστω $t_n = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$ (–ll– –ll– $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$)

$U_n = \sum_{k=1}^{n} (|\alpha_k| - \alpha_k)$ $\quad |\alpha_k| - \alpha_k \leq 2|\alpha_k|$

$\Rightarrow U_n \leq 2t_n$

Όμως $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \exists M > 0$ τ.ω

$t_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow U_n \leq 2M \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{U_n\}$ = φραγμένη

$|\alpha_k| - \alpha_k \geq 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} (|\alpha_k| - \alpha_k)$ συγκλίνει $\Rightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ τ.ω $U_n \xrightarrow{n \to \infty} L$

Όμως $u_n = t_n - S_n \xRightarrow[\text{συγκλίνουν}]{u_n, t_n} \{S_n\}$ συγκλίνει

$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

(i) $\sum^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ συγκλίνει απόλυτα επειδή η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως

Απόδειξη:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$S_{2n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

$= 1/2 + 1/12 + \dots + 1/(2n-1)(2n)$

S_{2n} είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k)}$$

$$\frac{1}{(2k-1)(2k)} \le \frac{1}{k^2}$$

$\Rightarrow S_{2n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, φραγμένη γιατί $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει

Αν μια ακολουθία συγκλίνει και η ακολουθία μερικών αθροισμάτων συγκλίνει

Άρα η $\{S_n\}$ είναι φραγμένη $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k)}$ συγκλίνει $\Rightarrow \{S_{2n}\}$ συγκλίνει σε κάποιο όριο $S \in \mathbb{R}$

$2k-1 \ge k$

$2k \ge k$

$(2k-1)(2k) \ge k^2$

$$S_{2n+1} = S_n + \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S$$

(2)

$\Rightarrow \{S_n\}$ συγκλίνει

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ συγκλίνει

Υπενθύμιση:

$$\left|\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1} \to 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2n+1} \le \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} \le \frac{1}{2n+1}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ) Έστω οι σειρές

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$

με $\beta_k \ge 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Έστω ότι $\exists M > 0$ τω $|\alpha_k| \le M \beta_k \; \forall n \in \mathbb{N}$

Αν $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει απολύτως

Απόδειξη

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \le M \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty \right)$$

Σειρά θετικών όρων ή θα είναι άπειρο ή θα συγκλίνει

Έστω $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$

$\Rightarrow S_n \le M t_n$ Όμως $\exists k \in \mathbb{N}$ τω

$t_n \le k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(γιατί $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει) $\Rightarrow S_n \le Mk \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ συγκλίνει

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} \quad , x \in \mathbb{R}$$

Ισχύει $\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$ και

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$

συγκλίνει απολύτως

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (ΟΡΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ)

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$, $\beta_k > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν

$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_k}{\beta_k} = l \in \mathbb{R}$ τότε:

$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει $\to$ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει απολύτως

Απόδειξη. Για $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$

$\left|\frac{\alpha_k}{\beta_k} - l\right| < 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \underset{-(|l|+1) = -|l|-1 \leq}{l - 1} < \frac{\alpha_k}{\beta_k} < l + 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right| < \underbrace{|l| + 1}_{M}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |\alpha_k| < (|l| + 1)\beta_k$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=k_0}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει

$\overset{\Theta 1}{\Rightarrow} \sum_{k=k_0}^{\infty} |\alpha_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ συγκλίνει

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$$

$$\frac{k+1}{k^4+k^2+3} \leq \frac{k+1}{k^4} = \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{k^4+k^2+3} = a_k}{\frac{1}{k^3} = b_k} = 1$$

Άρα αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ συγκλίνει

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (ΟΡΙΑΚΟ ΚΡΙΤ. ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΓΙΑ ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΜΗ-ΑΡΝΗΤΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ)

$\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sum_{k=1}^{n} b_k$, $a_k, b_k > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1 \in (0, \infty)$

Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν-αν $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει

Απόδειξη: - Αν $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει ~~αν-αν $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει~~

$\Rightarrow$ (Θ2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

- Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \frac{b_k}{a_k} = \frac{1}{1} \in \mathbb{R} \right)$

$\overset{\Theta 2}{\Rightarrow} \sum^{\infty} b_k$ συγκλίνει

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Θα δείξω ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$ αποκλίνει

$$\frac{\frac{k+1}{k^2+2}}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \in (0,\infty)$$

Όμως $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει

$\overset{\text{Θ3}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$ αποκλίνει

ΑΣΚ 1,3,7,8

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΡΙΖΑΣ

1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

i) Αν $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως

ii) Αν $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

2) i) Αν $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως

ii) Αν $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

- Αν $l=1$ τότε τα κριτήρια δεν εφαρμόζονται

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e-1$ (Αν ξεκινάμε από $k=0$ τότε $=e$)

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{k!}{k!\,(k+1)} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0<1$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει

2) $\sum^{\infty} \left(\frac{2^k}{k^k}\right)$ $\quad \sqrt[k]{\alpha_k} = \frac{2}{k} \xrightarrow{k \to \infty} 0 < 1$

$\overset{\shortparallel}{\alpha_k}$

$\Rightarrow$ Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$ συγκλίνει

- Αν $\lim_{k \to \infty} \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| = l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει

Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $\left| \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| - l \right| < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall n \geq n_0, \ldots < \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| < l + \varepsilon$

Για $\varepsilon = \frac{1 - l}{2} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall n \geq n_0$

$$\left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| < \overbrace{\frac{l+1}{2}}^{=c} < 1$$

$\forall n \geq n_0 \quad |\alpha_{k+1}| < c|\alpha_k| < cc|\alpha_{k-1}| =$

$= c^2 |\alpha_{k-1}|$ $\qquad n - (n_0 - 1)$

$< c^3 |\alpha_{k-2}| < \ldots < c|\alpha_{k_0}|$

$\Rightarrow \forall n > k_0, \quad |\alpha_k| < c^{k-k_0} |\alpha_{k_0}| = c^k \boxed{\frac{|\alpha_{k_0}|}{c^{k_0}}}$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \overset{\shortparallel}{M}$

$\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει $\xrightarrow[\text{κριτήριο σύγκρισης}]{} \sum_{k=k_0}^{\infty} |\alpha_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ συγκλίνει